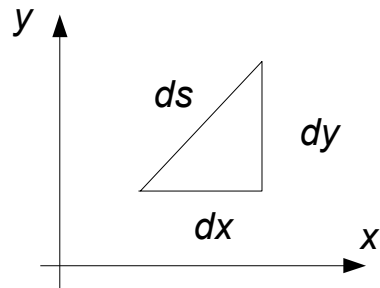


Allgemeine Relativitätstheorie

Eine anschauliche Einführung in die Grundlagen

Wegelemente

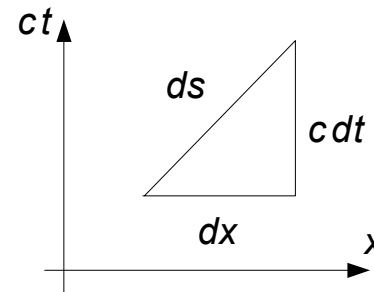
euklidischer Raum:



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

invariant bei Drehungen

Minkowski-Raum:



$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

invariant bei Lorentz-Transformationen

3-dimensional:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = (dx \ dy \ dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

Euklidische Metrik

4-dimensional:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

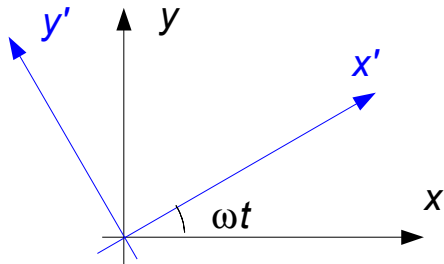
$$ds^2 = (c dt \ dx \ dy \ dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Minkowski-Metrik

Beschleunigte Bezugssysteme

Beispiel: rotierendes Bezugssystem



$$\begin{aligned}x &= x' \cos(\omega t') - y' \sin(\omega t') \\y &= x' \sin(\omega t') + y' \cos(\omega t') \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}$$

Wegelement im rotierenden System:

$$ds^2 = \left(c^2 - \omega^2 (x'^2 + y'^2) \right) dt'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

In beschleunigten Bezugssystemen ist das Wegelement von komplizierterer Form als in einem Inertialsystem.

Die Metrikkoeffizienten sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten:

$$ds^2 = g_{ab}(x,y,z,t) dx^a dx^b$$

Masse:

experimenteller Befund:

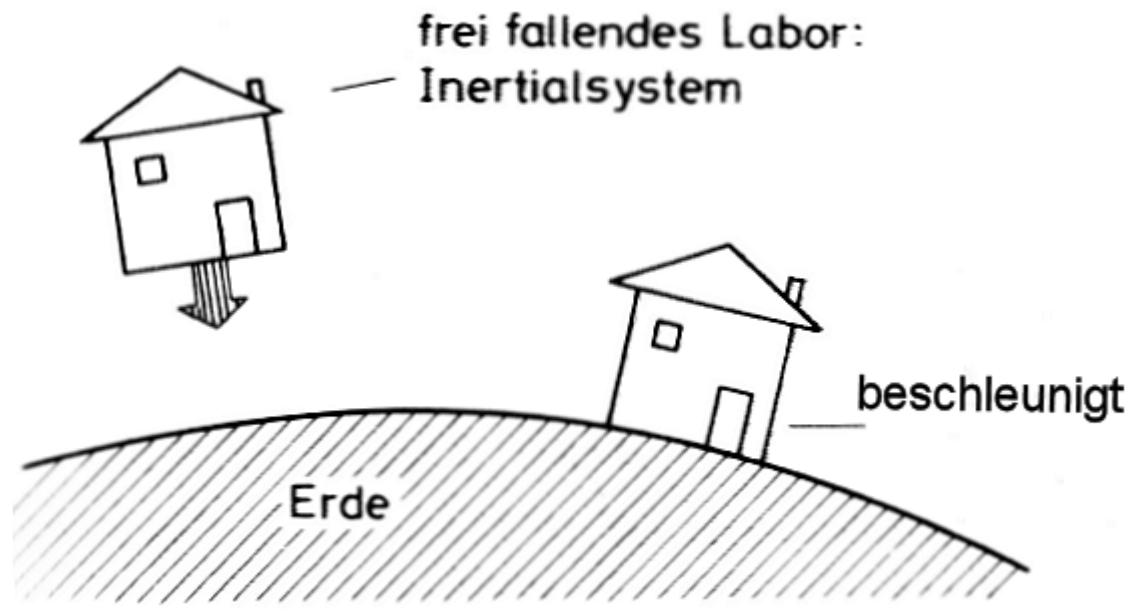
schwere Masse und träge Masse sind gleich

Inertialsystem:

Bezugssystem, in dem das 1. Newton'sche Gesetz (Trägheitsprinzip) gilt.

Beobachtungen in Raumschiffen und Raumstationen zeigen:

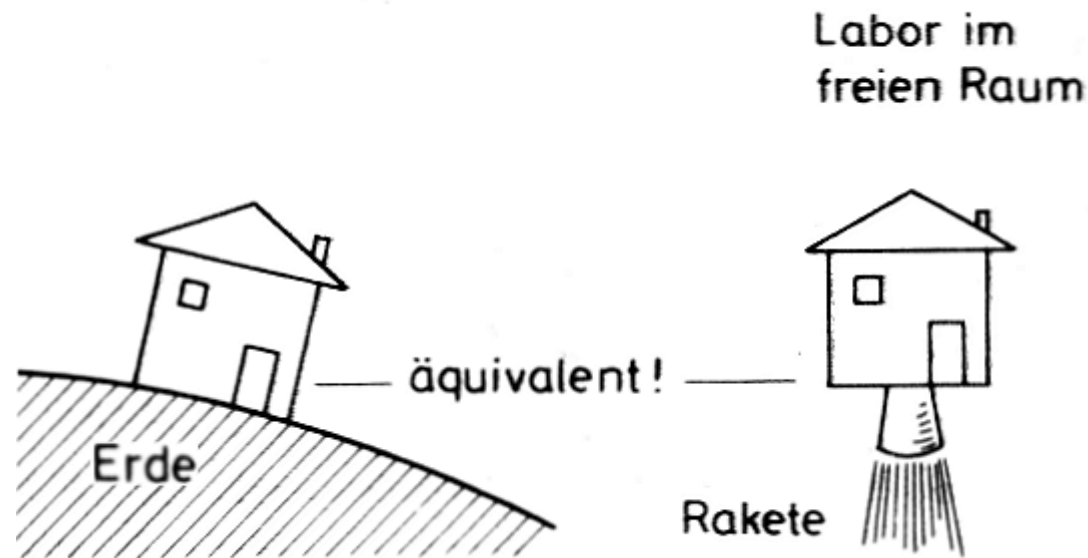
In einem Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind Inertialsysteme.



Äquivalenzprinzip

Die Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen und in Gravitationsfeldern sind einander äquivalent.

Durch Messungen innerhalb eines Labors kann man nicht unterscheiden, ob sich dieses in einem Gravitationsfeld befindet oder aus einer anderen Ursache konstant beschleunigt wird.



Gleichwertige Formulierung:

In Lokalen Inertialsystemen („Satellitenlabor“) gelten die bekannten Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie ohne Gravitation.

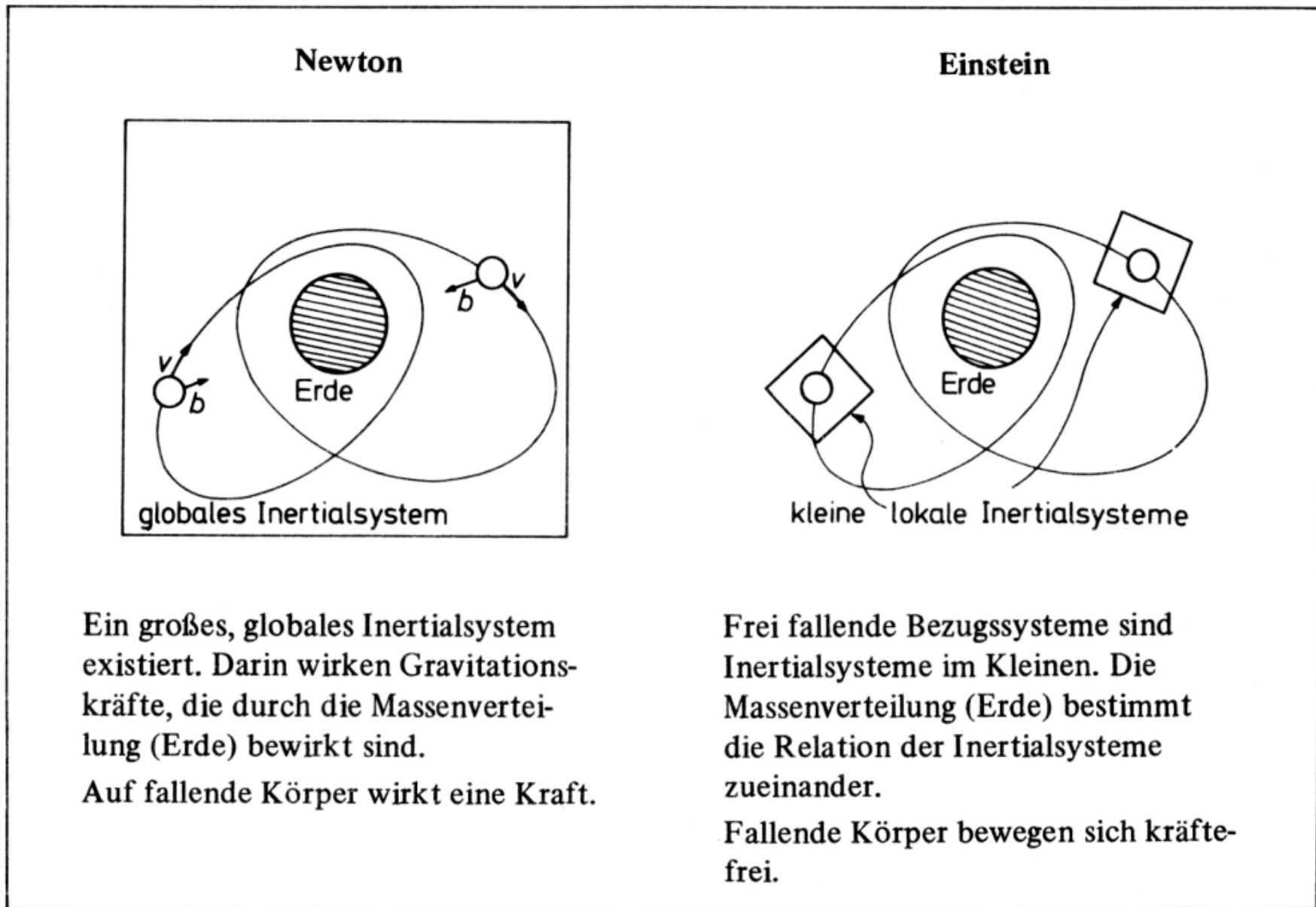


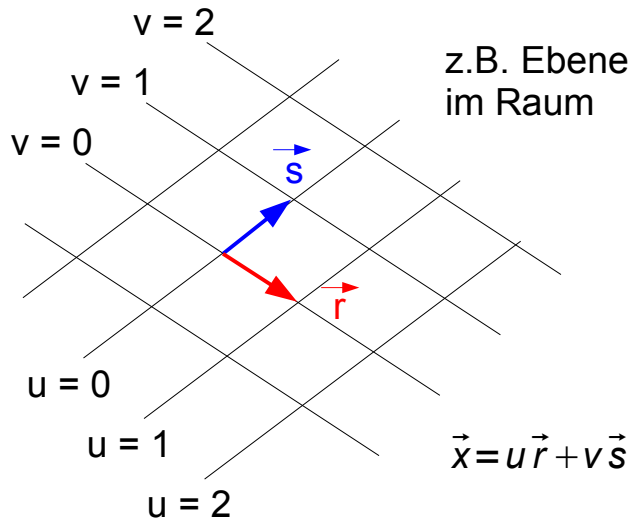
Bild 2. Newtons und Einsteins Auffassung des Gravitationsfeldes

Linienelement im Gravitationsfeld

ohne Gravitation/Beschleunigung:
flache Raumzeit,
Minkowski-Metrik

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Analogie:
ebene Fläche



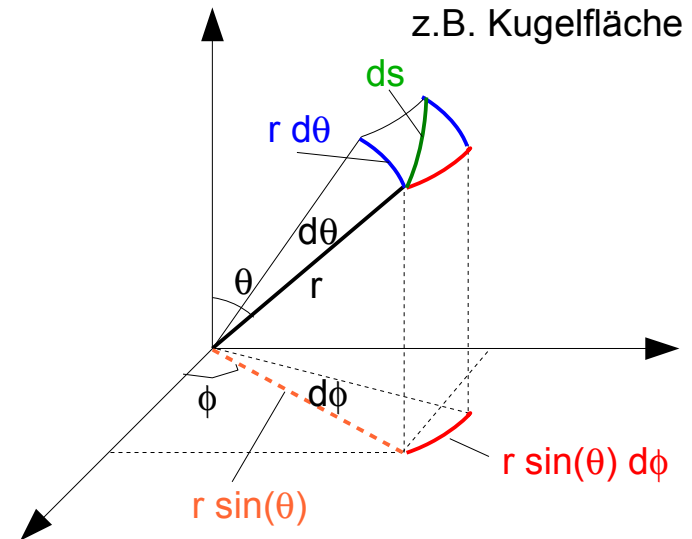
$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

$$ds^2 = (du \quad dv) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

mit Gravitation/Beschleunigung:
gekrümmte Raumzeit,
kompliziertere Metrik

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

gekrümmte Fläche



$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

$$ds^2 = (d\theta \quad d\phi) \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}$$

Feldgleichungen

Newton:

Grundsatz:

- Ursache der Gravitation ~ Masse
- beschrieben durch Potential
- Kraft ~ Änderung des Potentials

lokale Formulierung::

- Quellstärke der Gravitation
= Quellstärke der Potentialänderung
~ Dichte

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \cdot \rho(\vec{r})$$

Einstein:

Grundsatz:

- Ursache der Gravitation ~ Energie- und Impulsfluss
- beschrieben durch Metrikkoeffizienten
- Gravitation entspricht Krümmung der Raumzeit

lokale Formulierung::

- Krümmung
= Änderung der Metrikkoeffizienten
~ Energie- und Impulsfluss

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

Lineare Näherung in schwachen Feldern

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) - d\vec{x}^2 \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right)$$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Newton'sches Gravitationspotential

Oberfläche von	M/kg	r/km	$2 \Phi /c^2$
Erde	$5,97 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^{-9}$
Sonne	$1,99 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^{-6}$
Weißer Zwerg	$1,99 \cdot 10^{30}$	10^4	$3,0 \cdot 10^{-4}$
Neutronenstern	$1,99 \cdot 10^{30}$	10	$3,0 \cdot 10^{-1}$

Verhalten von Uhren



$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}}$$

$$dt \approx \frac{d\tau}{1 + \frac{\Phi}{c^2}}$$

$$dt \approx d\tau \cdot \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) > d\tau$$

In der Umgebung schwerer Massen ist der Gang von Uhren im Vergleich zu einer im Unendlichen ruhenden Uhr um den Faktor $(1 - \phi/c^2)$ verlangsamt.

Verhalten von Maßstäben



$$d\xi^2 = dx^2 \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi}{c^2}}}$$

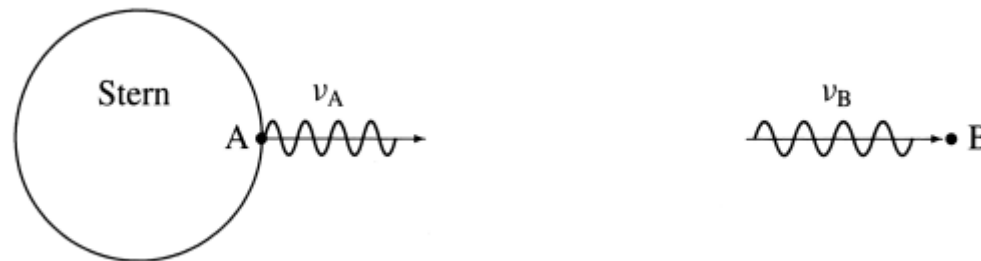
$$dx \approx \frac{d\xi}{1 - \frac{\Phi}{c^2}}$$

$$dx \approx d\xi \cdot \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) > d\xi$$

Maßstäbe, die von ∞ in die Umgebung schwerer Massen gebracht werden, schrumpfen im Vergleich zu den bei ∞ befindlichen Maßstäben um den Faktor $(1 + \phi/c^2)$.

Gravitationsrotverschiebung

Beispiel: Von der Oberfläche eines Sterns (A) wird Licht der Frequenz f_A ausgesandt. Am Ort B wird dieses Licht mit einer Frequenz f_B empfangen.



Voraussage der ART:

$$\frac{f_A - f_B}{f_A} = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_A} = \frac{\Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A)}{c^2}$$

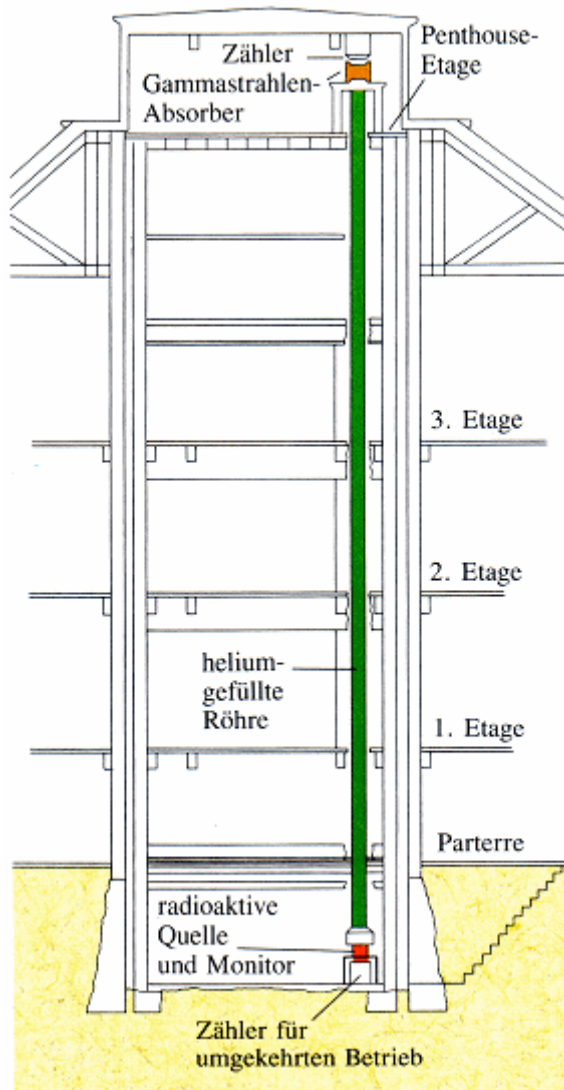
$$\lambda_B > \lambda_A$$

Rotverschiebung

Bestätigung durch Messungen an der Sonne und an Quasaren

Gravitationsrotverschiebung (2)

Erste terrestrische Messung: Pound/Rebka/Snider (1962/65)



homogenes Gravitationsfeld:

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= g y \\ \Phi(h) - \Phi(0) &= g h\end{aligned}$$

$$h = 22,5 \text{ m}$$

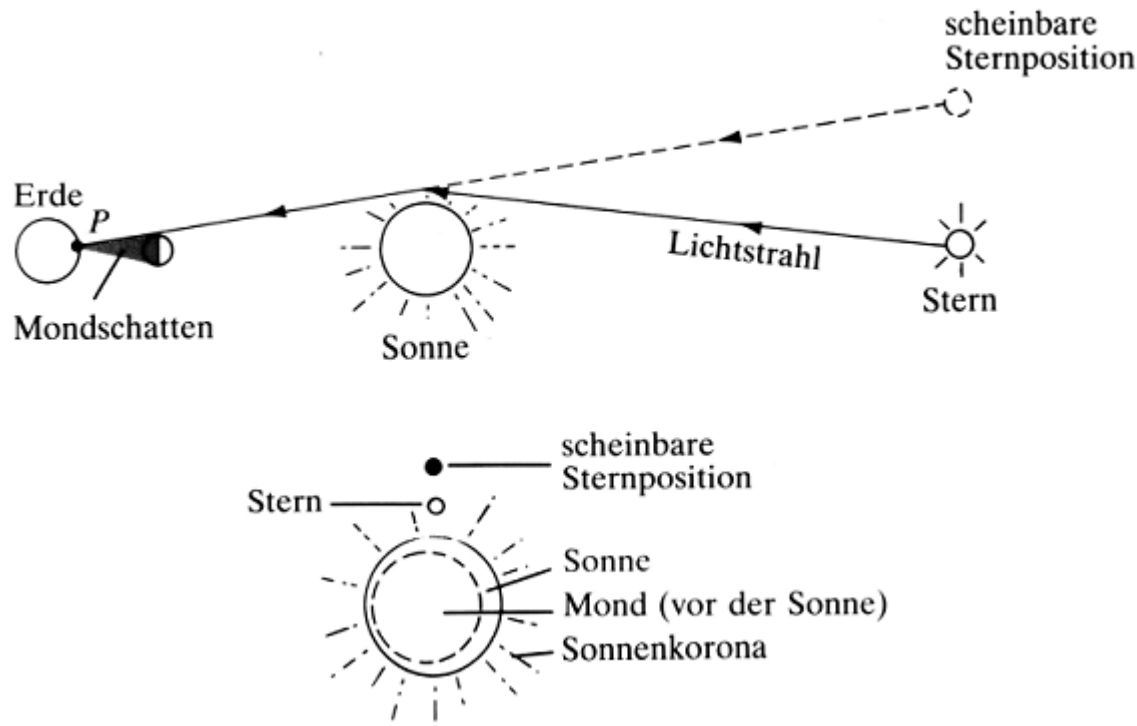
$$\frac{f_A - f_B}{f_A} = \frac{g h}{c^2} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 22,5 \text{ m}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 2,45 \cdot 10^{-15}$$

wurde experimentell bestätigt

Lichtablenkung

Voraussage der ART: Lichtstrahlen erfahren im Gravitationsfeld eine Ablenkung.

Erste Beobachtungen: Lichtstrahlen von Sternen, die den Rand der Sonne streifen (sichtbar bei Sonnenfinsternissen)



vorausgesagter Ablenkungswinkel:

$$\alpha = 1,75''$$

experimentell bestätigt

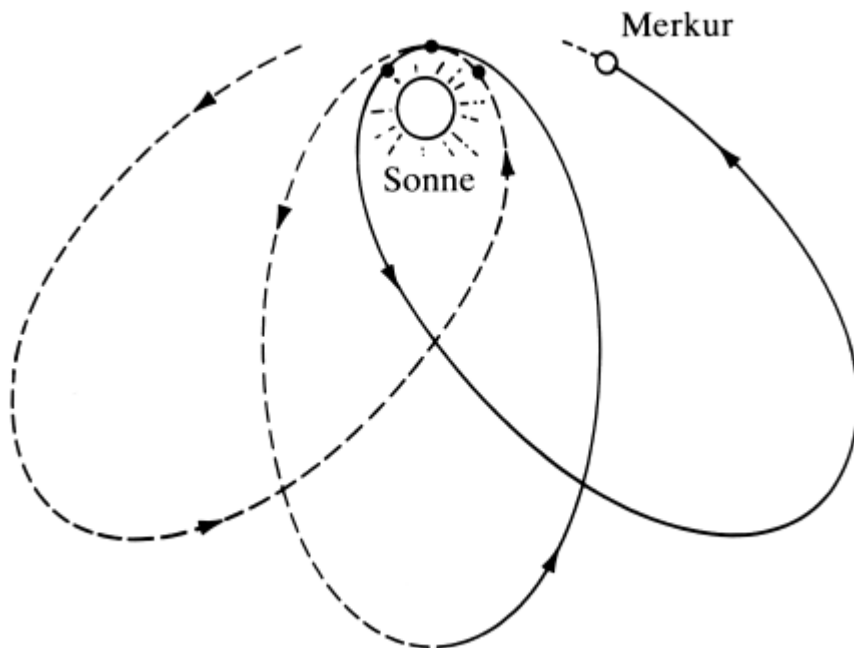
weitere experimentelle Bestätigungen durch Messungen an Quasaren

Periheldrehung

Die Newton'sche Gravitationstheorie sagt für die Bahnkurven von Planeten Ellipsen voraus.

In der ART ergibt sich eine kleine Abweichung von der geschlossenen Ellipsenbahn, die als Drehung der Ellipse beschrieben werden kann.

Experimentell wird sie als Winkeländerung $\Delta\varphi$ des sonnennächsten Bahnpunkts, des Perihels, beobachtet.



Beispiel Merkur:

Die ART ergibt $\Delta\varphi = 43''$ pro Erdjahrhundert,
in Übereinstimmung mit experimentellen Daten.

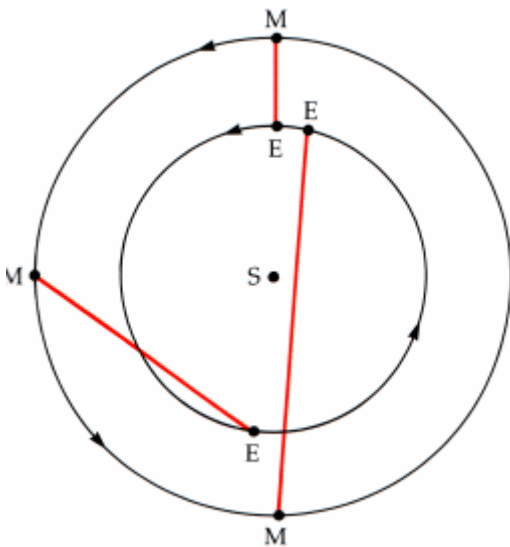
Radarechoverzögerung

Ein von der Erde ausgesandtes Radarsignal kann von einem anderen Planeten reflektiert und auf der Erde wieder empfangen werden.

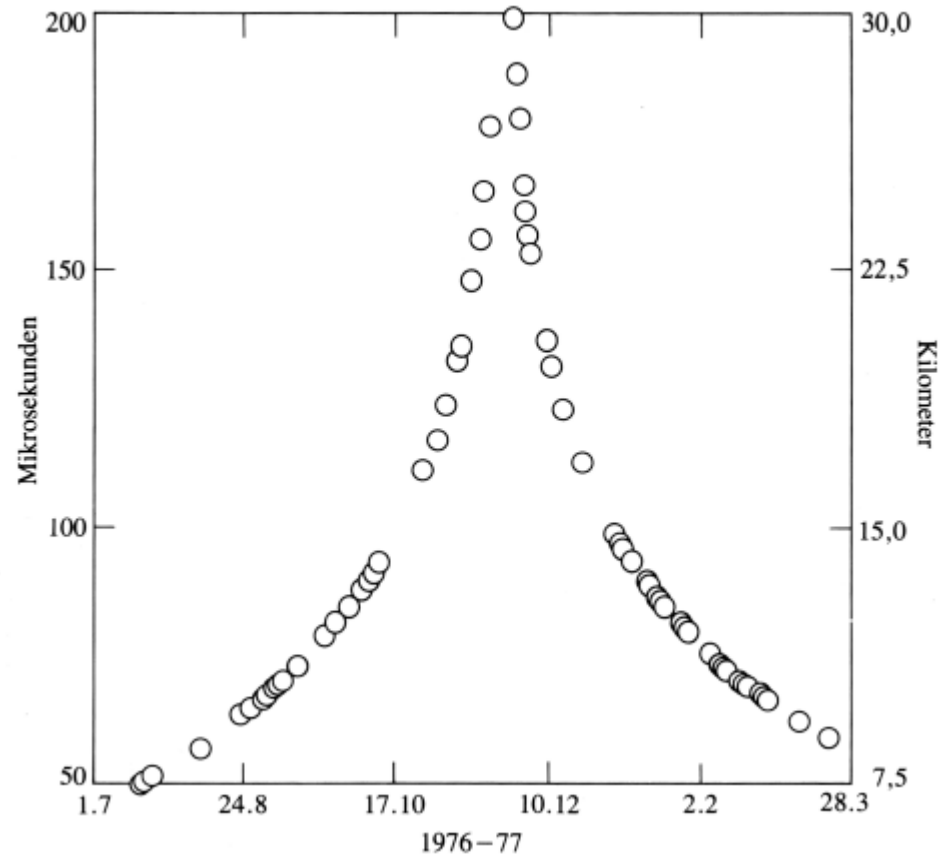
Passiert der Radarstrahl dabei das Gravitationsfeld der Sonne, so trifft das Echo zeitlich verzögert ein.

Diese Änderung der Laufzeit kann experimentell beobachtet werden.

Beispiel: Erde - Mars



Messung:



ART:

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M_S}{c^3} \cdot \ln \left(\frac{a_E \cdot a_M}{R_S^2} \right) = 220 \mu s$$

Wo wird die ART benötigt?

- Korrekturen/Erweiterungen der Newton'schen Gravitationstheorie
- Erklärung von Gravitationslinsen
- Voraussage von Gravitationswellen
- Theorie des Sternaufbaus und der Sternentwicklung
- Beschreibung von Schwarzen Löchern / Quasaren
- Kosmologie: Aufstellen von Weltmodellen, welche die zeitliche Entwicklung der Materieverteilung und des Gravitationsfeldes des Kosmos beschreiben